Chapitre 4

Exercice 1

Montrer qu'un automorphisme linéaire du tore $\mathbf{T}^r$ est expansif si et seulement s'il est hyperbolique.

Exercice 2

1) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$;

- A est hyperbolique ;

- $\widehat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).

2) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant -1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $|\mathrm{Tr}(A)| \neq 0$;

- A est hyperbolique ;

- $\widehat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).

3) Trouver une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients entiers de déterminant 1 telle que

- A n'est pas hyperbolique ;

- $\widehat{A}$ est mélangeante (pour la mesure de Haar).

(On commencera par montrer que les racines de $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ ne sont pas racines de l'unité).

Exercice 3

Donner un argument dynamique au fait que les valeurs propres d'une matrice carrée hyperbolique d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1 sont irrationnelles.

Exercice 4

Soit $F : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$ un homéomorphisme tel que F_* soit un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^r$. On va donner un autre preuve du fait qu'il existe une unique application continue $H : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$ homotope à l'identité telle que $H \circ F = \widehat{F}_* \circ H$.

1) Soit f un relèvement de F. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^r$, il existe un unique point $y = h(x) \in \mathbb{R}^r$ tel que la suite $(f^k(x) - F_*^k(y))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et que de plus on a $\|f^k(x) - F_*^k(y)\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2) Montrer que $h \circ f = F_* \circ h$ et que $h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r}$ est invariante par les translations entières.

3) Montrer que h est continue.

4) Conclure

Exercice 5

Soit $\widehat{A}$ un automorphisme hyperbolique de $\mathbf{T}^r$. Prouver le lemme de fermeture suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ-pseudo-orbite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q peut être ε-pistée par une orbite périodique $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de période q.

Exercice 6

On notera $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$) le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1 (resp. 1). Par abus de langage on identifiera une matrice de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ à l'automorphisme linéaire $A \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représenté par cette matrice dans la base canonique ; on notera alors $\widehat{A}$ l'automorphisme de $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ naturellement défini par A. On écrira $\mathrm{GL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z})$ pour l'ensemble des automorphismes $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ qui sont hyperboliques et on posera $\mathrm{SL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z}) \cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

On notera $\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)$ le groupe des homéomorphismes de $\mathbf{T}^2$. On écrira alors $\mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^2)$ pour le sous-groupe formé des homéomorphismes de degré 1 et $\mathrm{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ pour le sous-groupe formé des homéomorphismes homotopes à l'identité.

Si G est un groupe, on dira que $g' \in G$ est une *racine* de $g \in G$, s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $(g')^n = g$. On rappelle que le *centralisateur* d'un élément $g \in G$ est le sous-groupe $\mathrm{Cent}_G(g)$ des éléments $g' \in G$ tels que $gg' = g'g$.

1.a) On définit l'ensemble Λ_0 (resp. Λ_1) des valeurs propres d'automorphismes $A \in \mathrm{GL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z})$ (resp. $A \in \mathrm{SL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z})$). Montrer que les ensembles $\Lambda_0 \cup \{-1,1\}$ et $\Lambda_1 \cup \{-1,1\}$ sont des parties discrètes de $\mathbb{R}$ puis calculer

$$\lambda_0 = \min(\Lambda_0 \cap]1,+\infty[), \quad \lambda_1 = \min(\Lambda_1 \cap]1,+\infty[).$$

1.b) En déduire que le centralisateur d'un automorphisme $A \in \mathrm{GL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z})$ (resp. $A \in \mathrm{SL}_{\mathrm{hyp}}(2,\mathbb{Z})$) dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$) est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1.c) On considère les automorphismes linéaires

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux éléments qui engendrent $\mathrm{Cent}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}(A_0)$. Même question pour $\mathrm{Cent}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}(A_1)$ et $\mathrm{Cent}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}(A_1)$.

2.a) On note $\widehat{A}_0$ et $\widehat{A}_1$ les automorphismes de $\mathbf{T}^2$ définis respectivement par A_0 et A_1. Montrer que $\widehat{A}_0$ a un unique point fixe. En déduire que tout élément $G \in \mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_0) \cap \mathrm{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ a un relèvement à $\mathbb{R}^2$ qui commute avec A_0. Montrer que $\mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_0) \cap \mathrm{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ se réduit à l'identité. Prouver un résultat analogue pour $\mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1) \cap \mathrm{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$

2.b) En déduire ce que sont les groupes $\mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_0)$, $\mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1)$ et $\mathrm{Cent}_{\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1)$?

2.c) Quelles sont les racines de $\widehat{A}_0$ dans $\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)$? Quelles sont les racines de $\widehat{A}_1$ dans $\mathrm{Homeo}(\mathbf{T}^2)$? et dans $\mathrm{Homeo}_+(\mathbf{T}^2)$?